GEOMETRI PROYEKTIF PG(2, p^n) UNTUK MEMBENTUK RANCANGAN BLOK TIDAK LENGKAP SEIMBANG SIMETRIS

Yuni Hidayati[1] dan Bambang Irawanto[2]

[1, 2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro

Jln. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

Abstract A Symmetric Balanced Incomplete Block design with parameters (v, b, k, r, λ) is Balanced Incomplete Block (BIB) design with $v = b$ and $r = k$. Projective geometry PG (2, p^n) is the finite geometry of two dimensions over the Galois Field GF(p^n). Projective geometry PG (2, p^n) can be used to construct symmetric BIB design if the points of PG(2, p^n) are assumed same with the object of symmetric BIB design and the lines which contain the points from PG(2, p^n) same with the blocks of symmetric BIB design.

Keywords: Galois Field GF(p^n), Projective geometry PG (2, p^n)

1. PENDAHULUAN

Geometri disebut geometri berhingga jika geometri memiliki jumlah titik yang berhingga. Elemen-elemen dalam geometri berhingga dapat digunakan untuk mengkontruksi geometri euclid berhingga dari dimensi dua yang dinotasikan EG (2, p^n) dan geometri proyektif dari dimensi dua yang dinotasikan PG (2, p^n). PG (2, p^n) digunakan untuk merancang suatu Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang Simetris (RBTLSS).

Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang Simetris (RBTLSS) adalah salah satu pengembangan dari Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang (RBTLS). Suatu RBTLS dengan parameter (v, b, r, k, λ) dikatakan simetris jika $v = b$ dan juga $r = k$.

2. GEOMETRI PROYEKTIF PG (2, p^n)

Geometri Proyektif diperoleh dari perluasan geometri Euclid EG (2, p^n). Karena setiap dua garis pada PG(2,p^n) harus berpotongan maka harus ditambahkan satu titik baru pada EG(2,p^n) yang berkorespondensi ke setiap *parallel pencil* dan posisinya berdekatan dengan garis-garis yang berada di *parallel pencil* tersebut.

Teorema 1 [2]

Geometri proyektif PG(2,p^n) mempunyai $s^2 + s + 1$ titik dan $s^2 + s + 1$ garis, yang mana setiap garis memuat $s + 1$ titik dan setiap titik termuat di $s + 1$ garis.

Bukti

Berdasarkan EG(2,p^n) yang mempunyai s^2 titik dan terdapat $s + 1$ titik di tak hingga (titik yang berkorespondensi ke setiap *parallel pencil*) maka ada $s^2 + s + 1$ titik pada PG(2,p^n). Begitu juga dengan garis, terdapat $s^2 + s$ garis pada EG(2,p^n) dan satu garis di tak hingga yang menghubungkan semua titik-titik di tak hingga sehingga ada $s^2 + s + 1$ garis pada PG(2,p^n).

Untuk setiap m tertentu dari GF(p^n) terdapat *parallel pencil* dari bentuk $y = mx + \beta$ dengan kemiringan m. Setiap garis dari *pencil* ini mempunyai persamaan $y = mx + \beta$, yang mana mempunyai harga m yang sama untuk setiap garis dari satu *pencil* tetapi harga β yang berbeda untuk setiap garis yang berbeda dalam satu *pencil*. Titik-titik di tak hingga yang berkorespondensi dengan *pencil* ini dikoordinasikan oleh *m*. Selain itu juga terdapat *parallel pencil* dari bentuk $x = \gamma$ dengan kemiringan ∞. Korespondensi antar titik-titik dapat dikoordinasikan oleh ∞.

Garis di tak hingga dinotasikan dengan l_∞. l_∞ terdiri dari $s+1$ titik di tak hingga dan tidak memuat titik berhingga. Setiap garis berhingga memuat *s* titik berhingga dan titik di tak hingga yang berkorespondensi dengan *pencil* dimana garis tersebut berada, sehingga garis $y = mx + \beta$ memuat titik (*m*) di tak hingga dan garis $x = \gamma$ memuat titik (∞). Jadi setiap garis dari PG(2,p^n) memuat $s+1$ titik. Sedangkan titik berhingga termuat di $s+1$ garis berhingga, yang mana $s+1$ garis berhingga tersebut terbagi merata di setiap *parallel pencil* dan titik di tak hingga termuat di setiap *s* garis dari *parallel pencil* yang berkorespondensi dengan titik tersebut serta termuat pada garis di tak hingga. Jadi setiap titik dari PG(2,p^n) termuat tepat di $s+1$ garis. ■

3. RANCANGAN BLOK TIDAK LENGKAP SEIMBANG SIMETRIS (RBTLSS)

Definisi 1

Suatu RBTLS dengan parameter (*v, b, r, k,* λ) dikatakan simetris jika $v = b$ dan $r = k$.

RBTLSS dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu $M = (m_{ij})$.

Definisi 2

Matriks $M = (m_{ij})$, dengan $i = 1,...,v$ dan $j = 1,...,b$ adalah matriks *incidence* dari suatu RBTLS dengan parameter (*v, b, r, k,* λ) dengan blok-blok $B_1,...,B_b$ dan objek-objek $m_1,...m_v$ yang didefinisikan sebagai berikut : $m_{ij} = 1$, jika $m_i \in B_j$ dan

$m_{ij} = 0$, jika $m_i \notin B_j$

Teorema 2 [2]

Jika $M = (m_{ij})$, dengan $i = 1,...,v$ dan $j = 1,...,b$ adalah matriks *incidence* dari suatu RBTLS dengan parameter (*v, b, r, k,* λ), maka $\sum_{j=1}^{b} m_{ij} = r$ dan $\sum_{i=1}^{v} m_{ij} = k$.

Teorema 3 [2]

Jika $M = (m_{ij})$, dengan $i = 1,...,v$ dan $j = 1,...,b$ adalah matriks *incidence* dari suatu RBTLS dengan parameter (*v, b, r, k,* λ), maka

(i). $\sum_{j=1}^{b} m_{ij} m_{\alpha j} = r,$ jika $i = \alpha$, dan

$\sum_{j=1}^{b} m_{ij} m_{\alpha j} = \lambda,$ jika $i \neq \alpha$.

(ii). $MM^T = (r - \lambda) I_v + \lambda J_v$

dimana M^T adalah transpose dari matriks *M*, I_v adalah matriks identitas berukuran $v \times v$ dan J_v adalah matriks berukuran $v \times v$ yang semua elemennya adalah 1.

(iii.) $|MM^T| = |N| = (r - \lambda)^{v-1}(v\lambda - \lambda + r)$

$= rk(r - \lambda)^{v-1}$.

Bukti

(i) Jika $i = \alpha$, maka persamaan (i) menjadi $\sum_{j=1}^{b} m_{ij}^2 = r$ sehingga $m_{ij} = m_{ij}^2$ karena $m_{ij} = 0$ atau 1. Analog dengan teorema 2. Andaikan $i \neq \alpha$, maka $m_{ij} m_{\alpha j} = 1$ jika dan hanya jika keduanya m_{ij} dan $m_{\alpha j}$ bernilai 1 yang mana kedua objek *i* dan α muncul dalam blok *j*. kemudian ada tepat λ nilai dari *j* untuk kemunculan bersama pasangan *i* dan α dalam blok *j*. oleh karena itu $m_{ij} m_{\alpha j} = 1$ untuk tepat λ nilai dari *j* untuk suatu *i* dan α tertentu dimana $i \neq \alpha$, dan nol untuk nilai-nilai yang lain dari *j*. ini membuktikan (i) untuk kasus $i \neq \alpha$.

(ii)

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1b} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{v1} & m_{v2} & \cdots & m_{vj} & \cdots & m_{vb} \end{bmatrix},$$

dari persamaan (i) diperoleh bahwa

$$MM^T=\begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} r-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{bmatrix}=(r-\lambda)I_v+\lambda J_v$$

(iii)

$$\left|MM^T\right|=\begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix}=\{r+\lambda(v-1)\}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix}$$

yang diperoleh dengan menambahkan $v-1$ baris-baris terakhir pada baris pertama dan mengeluarkan faktor $\{r+\lambda(v-1)\}$ dari elemen-elemen baris pertama. Kemudian mengalikan baris pertama dengan λ dan mengurangkannya dari baris-baris yang lain, diperoleh:

$$\left|MM^T\right|=\{r+\lambda(v-1)\}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\{r+\lambda(v-1)\}(r-\lambda)^{v-1}$$

$$=rk(r-\lambda)^{v-1}$$

Teorema 4 [2]

Jika M adalah suatu matriks *incidence* dari suatu RBTLS (v, b, r, k, λ) yang simetris. M^T adalah matrik transpos dari M. I_v adalah matrik identitas berukuran $v\times v$, J_v adalah matriks berukuran $v\times v$ yang semua elemennya adalah 1, maka M memenuhi 4 relasi berikut:

$$MM^T=N=(k-\lambda)I_v+\lambda J_v \qquad \text{(iv)}$$

$$M^TM=N=(k-\lambda)I_v+\lambda J_v \qquad \text{(v)}$$

$$MJ_v=kJ_v \qquad \text{(vi)}$$

$$J_vM=kJ_v \qquad \text{(vii)}$$

Bukti

Di sini, (iv) adalah bentuk yang diakibatkan oleh (ii) mengingat bahwa $v=b$, $r=k$, Selain itu (vi) menyatakan bahwa setiap baris pada M memuat k buah elemen 1, ini berarti bahwa terdapat sejumlah $r=k$ blok-blok yang memuat setiap objek. Persamaan (vii) menyatakan bahwa setiap kolom pada M memuat k buah elemen 1, ini berarti bahwa terdapat sejumlah k objek dalam setiap blok. Jadi, persamaan (v) juga bisa didapatkan. Persamaan (v) merupakan akibat dari (iv), (vi) dan (vii) [5].

Teorema 5 [2]

Andaikan M adalah suatu matriks nonsingular berukuran $v\times v$ yang memenuhi (iv) atau (v) dan juga (vi) atau (vii), maka M memenuhi keempat persamaan, (iv), (v), (vi) dan (vii). Selanjutnya v, k, λ memenuhi relasi $k^2-k=\lambda(v-1)$.

Bukti

Berdasarkan persamaan (iii)

$\left|MM^T\right|=|N|=(k-\lambda)^{v-1}(v\lambda-\lambda+k)$, maka kenonsingularan dari M berarti bahwa $k-\lambda\neq 0$, $v\lambda-\lambda+k\neq 0$. Misalkan diasumsikan bahwa (iv) dan (vi) dipenuhi, maka M nonsingular dan

$$MM^T=(k-\lambda)I_v+\lambda J_v,\quad MJ_v=kJ_v.$$

Jika persamaan (vi) dikalikan dengan M^{-1} pada sebelah kiri, maka diperoleh

$$M^{-1}(MJ_v)=M^{-1}(kJ_v),$$

sehingga $J_v=kM^{-1}J_v$ dengan $k\neq 0$ dan $M^{-1}J_v=k^{-1}J_v$. Selain itu $(MJ_v)^T=(kJ_v)^T$ atau $J_vM^T=kJ_v$, karena

$J_v^T = J_v$. Dengan $J_v^2 = vJ_v$, maka diperoleh

$$M^T = M^{-1}(MM^T) = (k-\lambda)M^{-1} + \lambda M^{-1}J_v$$
$$= (k-\lambda)M^{-1} + \lambda k^{-1}J_v$$
$$kJ_v = J_v M^T = (k-\lambda)J_v M^{-1} + \lambda k^{-1} v J_v.$$

Jadi,

$$J_v M^{-1} = \frac{k - \lambda k^{-1} v}{k-\lambda} J_v = gJ_v,$$ dimana g adalah konstanta. Sehingga

$$J_v = gJ_v M$$
$$vJ_v = J_v^2 = (gJ_v M)J_v = gJ_v(MJ_v) = gJ_v(kJ_v)$$
$$= gkJ_v^2 = gkvJ_v$$

Ini memberikan $v = gkv$, sehingga $gk = 1$, $g = k^{-1}$. Tetapi $g(k-\lambda) = k - \lambda k^{-1} v$. Dengan mengganti $g = k^{-1}$ diperoleh $k^{-1}(k-\lambda) = k - \lambda k^{-1} v$ dan mengalikan dengan k diperoleh $k - \lambda = k^2 - \lambda v$, yang sama dengan relasi

$$k^2 - k = \lambda(v-1)$$

yang akan dibuktikan juga.

Selain itu $J_v M^{-1} = gJ_v = k^{-1}J_v$ memberikan $J_v = k^{-1}J_v M$ atau $J_v M = kJ_v$ yang merupakan relasi (vii) yang ingin dibuktikan.

Sedangkan untuk relasi

$$M^T = (k-\lambda)M^{-1} + \lambda k^{-1}J_v$$

jika dikalikan dengan M pada sebelah kanan, akan diperoleh

$$M^T M = (k-\lambda)M^{-1}M + \lambda k^{-1}J_v M$$
$$= (k-\lambda)I_v + \lambda k^{-1}J_v M$$
$$= (k-\lambda)I_v + \lambda k^{-1}(kJ_v)$$
$$= (k-\lambda)I_v + \lambda J_v$$

yang merupakan relasi (v) yang ingin dibuktikan.

Sehingga terbukti bahwa untuk M *nonsingular*, (iv) dan (vi) menunjukkan dipenuhinya (v), (vii) dan relasi $k^2 - k = \lambda(v-1)$.

Dengan mengganti M^T dengan M, dan dengan penjelasan yang sama, maka akan dapat dibuktikan bahwa persamaan (v) dan (vi) atau (vii) juga memenuhi relasi-relasi yang lain. ■

4. PG $(2, p^n)$ UNTUK MEMBENTUK RBTLSS

Untuk merancang suatu Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang Simetris (RBTLSS) dapat menggunakan PG $(2, p^n)$.

Contoh

Misalkan terdapat 7 objek 1, 2,…, 7 dalam 7 blok. ($v = b = 7$, $r = k = 3$ dan $\lambda = 1$)

Dengan menganggap 7 objek sama dengan 7 titik pada PG(2, 2) dan 7 blok yang memuat 7 objek tersebut sama dengan 7 garis yang memuat titik-titik dari PG(2, 2), maka persoalan di atas dapat diselesaikan dengan berdasarkan Geometri Proyektif PG (2, 2).

Salah satu cara untuk memperoleh blok adalah dengan mengidentifikasi 7 objek (misalkan dinotasikan dengan 1, 2, 3, 4, dst) dengan 7 titik dari geometri berhingga PG (2, 2).

Dari titik-titik pada PG (2,2) dapat diidentifikasi objek-objeknya yaitu :

Tabel 1. Tabel objek-objek berdasarkan PG (2,2)

Titik-titik dari PG (2,2)	*Objek*
(1)	1
(1,0)	2
(∞)	3
(0,1)	4
(1,1)	5
(0,0)	6
(0)	7

dan garis-garis pada PG (2,2) ditunjukkan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Tabel garis-garis pada PG (2,2)

Persamaan Garis	*Titik-titik yang dihubungkan*
$y = 0$	(0,0), (1,0), (0)
$y = 1$	(0,1), (1,1), (0)
$y = x$	(0,0), (1,1), (1)

$y = x+1$	(1,0), (0,1), (1)
$x = 0$	(0,0), (0,1), (∞)
$x = 1$	(1,0), (1,1), (∞)
l_∞	(0), (1), (∞)

Dari Tabel 2, dapat dibuat rancangan blok-bloknya yaitu :

Tabel 3. Tabel blok-blok yang dihasilkan dari PG (2,2)

B_1 : (6,2,7)	B_5 : (4,5,7)
B_2 : (6,5,1)	B_6 : (2,4,1)
B_3 : (6,4,3)	B_7 : (2,5,3)
B_4 : (7,1,3)	

Dari Tabel 3, matriks *incidence*nya adalah:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Disini kolom kedua menunjukkan bahwa blok B_2 memuat objek-objek 1 5 dan 6 dan baris ketiga menunjukkan bahwa objek 3 muncul di dalam blok-blok B_3, B_4, B_7.

5. KESIMPULAN

1. RBTLSS dapat dibentuk dari geometri berhingga khususnya geometri Proyektif dari dua dimensi PG (2, p^n) atas lapangan GF (p^n).
2. Geometri Proyektif PG (2, p^n) merupakan perluasan dari Geometri Euclid EG (2, p^n) dari dua dimensi PG (2, p^n) atas lapangan GF (p^n).

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bambang Irawanto (2001), *Galois Field*, Tesis, Jurusan Ilmu-ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam UGM, Yogyakarta.
[2] Bose R. C. & Manvel, B. (1984), *Introduction to Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons., New York.
[3] Jungnickel, D. & Vanstone, S. A. (1993), *Coding Theory, Design Theory, Group Theory*, John Wiley & Sons Inc., Canada.
[4] Mac Williams, F. J. & Sloane, N. J. A. (1993), *The Theory of Error Correcting Codes*, Murray Hill, USA.
[5] Marshall Hall, Jr. (1986), *Combinatorial Theory*, Second Edition, John Wiley & Sons. New York.
[6] Van Lint, J. H. & Wilson, R. M. (1992), *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Australia.